



TITLE:

全開状態のバタフライ・バルブを 過ぎる流れの粘性流モデル(ナビエ ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

矢田, 明; 桜井, 健郎; 武田, 英徳

CITATION:

矢田, 明...[et al]. 全開状態のバタフライ・バルブを過ぎる流れの粘性流モデル(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 539: 271-291

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98718>

RIGHT:

全開状態のバタフライ・バルブを過ぎる流れの 粘性流モデル

日本鋼管 矢田 明 (Akira Yada)

京大・工 桜井健郎 (Takeo Sakurai)

京大・工 武田英徳 (Hidenori Takeda)

概要

二次元流路内に迎え角なしに置かれた楕円形バルブを過ぎる縮まない粘性流体の定常二次元流れを研究した。一般曲線座標を用い、流路壁面およびバルブ表面がおのの対応する座標線に写像されるようにし、Navier-Stokes 方程式の流れ関数-渦度形式を解いた。方程式を解く手法としては ADI 法および Euler explicit 法を用いた。

流れ模様、圧力分布および抵抗係数を 0 から 40 の範囲にわたる Reynolds 数に対して求めた。

各記号の意味

C_D = バルブの抵抗係数

J = 座標変換のヤコビアン

L_0 = 特徴長さ (流路の半幅) p = 圧力

P, Q = 座標線の集散に用いた関数

R = レイノルズ数 t = 時間 u = 速度

u, v = 速度の x, y 成分

U_0 = 特徴速度 (上流境界の平均速度)

x_0 = 座標原点より上流, 下流境界までの距離

x, y = 座標

X, Y = 流体がバルブにおよぼす力の x, y 成分

α, β, γ = 座標変換パラメータ μ = 粘性係数

ξ, η = 一般曲線座標 ρ = 密度

τ = セン断応力 ψ = 流れ関数

ω = 渦度 Δ = ラプラシアン

物理量無次元化

ここで記号 * を付したものがもともとの次元を持つ物理量を表す。

$$x^* = L_0 x, \quad y^* = L_0 y, \quad u^* = U_0 u,$$

$$t^* = (L_0/U_0)t, \quad \rho^* = \rho_0 = \text{const},$$

$$p^* = \rho_0 U_0^2 R p, \quad \tau^* = \mu (U_0/L_0) \tau.$$

1. まえがき

バタフライ・バルブはその機構が簡単で機能が豊かである点により流量調節弁として広く用いられている。

木村ら(1980a,b)はバタフライ・バルブを過ぎる流れを実験的・理論的に詳細に研究し、バルブによる圧力損失、バルブの抵抗係数等を求め、また近似解法によってバルブまわりの流れ模様も検討した。山下(1980)は迎え角のある平板バルブを過ぎる流れをストークス近似によって求め、流れのパラメータに対する迎え角の影響を明らかにした。

以上の研究によってもバタフライ・バルブの設計に必要な基礎データは得られるが、性能を尚一層向上させるにはバルブを過ぎる流れを正確に求める必要がある。

本研究においては、二次元流路内に迎え角なしで置かれた楕円形バルブを過ぎる縮まない粘性流体の二次元定常流れを解析した。これは全開状態のバタフライ・バルブを過ぎる流れのモデルである。

Thompsonら(1976)によって提案された一般曲線座標系を用い、流路壁とバルブ表面が、おのこの対応する座標線に写像されるようにし、基礎方程式は一樣間隔のデカルト座標の形になった計算面で解いた。この座標系を用いると境界条件は座標格子点上で課することができる。また、物理面上の任

意の領域の座標線を集中することによってその領域での解像度を上げることができる。

Navier-Stokes 方程式の流れ関数-渦度表現を用いた。そして、流れ関数についてのポアッソン型方程式を解くには ADI 法を運動量方程式の時間積分には Euler explicit 法を用いた。時間積分のステップ幅は、粘性散逸時間よりも小さくなるように選り、計算が数値的に安定に進むようにした。

問題の定式化および数値解析の手続を 2 章に示し、得られた結果とその検討を 3 章に示す。

2. 一般曲線座標における基礎方程式

本研究においては、Thompson ら (1976) によって提案された一般曲線座標系を採用し、その座標系を我々の問題へ適用する手法も Themes ら (1977) および Thompson ら (1977) の方法に従った。

2.1 一般曲線座標

二次元流路内に迎え角なしに置かれた楕円形バルブを過ぎる縮まない粘性流体の定常二次元流れを考察する。楕円形の短軸・長軸比は 0.2 とし、流入・流出条件を課す上流境界

および下流境界は $x = -20.$, $x = -20$ にあるとする。

この物理面を Thompson ら (1976) の提案による曲線座標変換の方法によって、一様間隔の矩形計算面に変換する。二種類の変換方法を図1, 2に示す。図1に示される‘O-タイプ’変換ではバルブをとり囲む形の座標線があるので、バルブ表面に座標点を集めることによって流れ模様の詳細にわたる解析を行なう事が出来る。図2に示す‘H-タイプ’変換では流線を模した座標線があるので、こちらは流路壁上での圧力分布を調べるのに適している。

座標変換関数；

$$x = x(\xi, \eta) \quad , \quad (2-1)$$

$$y = y(\xi, \eta) \quad , \quad (2-2)$$

は、変換面上では次の Poisson 型方程式を満す。

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2 [x_{\xi} P(\xi, \eta) + x_{\eta} Q(\xi, \eta)] \quad , \quad (2-3)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2 [y_{\xi} P(\xi, \eta) + y_{\eta} Q(\xi, \eta)] \quad , \quad (2-4)$$

ただし、ここで

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad , \quad (2-5)$$

$$\beta = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} \quad , \quad (2-6)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad , \quad (2-7)$$

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \quad . \quad (2-8)$$

上は座標の関数 $x(\xi, \eta)$ および $y(\xi, \eta)$ の変換面における

準線形楕円型方程式であり、ヤコビアンは孤立特異点を除いて0となることはない。この変換によって境界条件は直線上の境界点で課す事が出来るようになり、また変換面上での座標間隔は一定となる。非同次項の $P(\xi, \eta)$ および $Q(\xi, \eta)$ は、座標線を物理面上の特定の線もしくは点に集中させるために導入してある。

2.2 基礎方程式

流れ関数と渦度を変数とした縮まない粘性流体の二次元流れを表す Navier - Stokes 方程式は次の様になる。

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = (\omega_{xx} + \omega_{yy})/R, \quad (2-9)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega. \quad (2-10)$$

前節の説明のとおり、本研究においては数値計算はすべて変換変数の計算面で行なうようにしたので、基礎方程式に於ても独立変数を $x-y$ から $\xi-\eta$ に変換した。また Reynolds 数0の流れの解析には (2-9) 式を

$$\omega_t = \omega_{xx} + \omega_{yy} \quad (2-11)$$

のようにし、非定常問題の極限として定常解を求めた。

2.3 境界条件

上流境界、下流境界では速度分布が Poiseuille 流れとなる

よう次の条件を課した：

$$\psi = \frac{3}{2} \left(y - \frac{y^3}{3} \right), \quad x = \pm x_0 \quad (2-12)$$

ここで x_0 には Poiseuille 流れの仮定が満たされるのに十分に大きな値を与えた。流路の上・下壁面上では ψ はそれぞれ $+1$, -1 とし、よどみ流線上では 0 とした。

渦度に対する境界条件としては、流入・流出境界、すなわち $x = \pm x_0$ においては流れ方向に関する微係数を 0 と置いた (Roache 1972a)。また、流路壁面上およびバルブ表面上では、すべりなしの条件から次式で与えた (Roache 1972b),

$$\omega = -\gamma \psi_{\eta\eta} / J^2 \quad (2-13)$$

2.4 計算手順

方程式 (2-10) は ADI 法を用いて解いた。収束条件としては次式を用いた：

$$\left| \frac{\psi^{k+1} - \psi^k}{\psi^{k+1}} \right| < \varepsilon \quad (2-14)$$

ここで k は逐次近似の回数を示す。よどみ流線近傍では ψ が 0 に近いので、この条件は強過ぎる。そこで条件の適用範囲を次のように限定した、

$$|\psi^{k+1}| > \delta \quad (2-15)$$

ここで δ は十分小さな値である。(実際の計算に用いた値は

$\varepsilon = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-4}$ である)

方程式 (2-9) の時間積分には Euler explicit 法を用い、ステップ幅は粘性拡散時間に 1 以下の係数をかけたものとした。(計算が数値的に安定に進むように、この係数は始めは十分小さく (10^{-3} 程度) とり、徐々に大きくしていった。(最終的には 0.5))

以上の手続を渦度の時間微係数が十分小さくなるまで続けた。収束条件式を変換変数で示すと次のようになる、

$$\begin{aligned} & |\omega_t| / \{ |\psi_{\eta} \omega_{\xi} / J| + |\psi_{\xi} \omega_{\eta} / J| \\ & \quad + (|\alpha \omega_{\xi\xi}| + |2\beta \omega_{\xi\eta}| + |\gamma \omega_{\eta\eta}|) / J^2 R \\ & \quad + (|Q \omega_{\eta}| + |P \omega_{\xi}|) / R \} < \varepsilon' \end{aligned} \quad (2-16)$$

(2-14) 式の適用範囲に制限を置いたのと同様、(2-16) 式の適用範囲も次のように制限した。

$$|\omega| > \delta' \cdot |\omega|_{\max} \quad (2-17)$$

(計算に用いた値は $\varepsilon' = 10^{-2}$, $\delta' = 0.2$ である)

2.5 圧力係数

流れにおける速度分布を求めた後、もともとの Navier-Stokes 方程式から圧力の微分を求め、それを線積分して圧力を求めた。積分は上流境界を始点とし、そこでの値を 0 と置いた。座標を固定、 ξ について積分する際は次式によった、

$$\begin{aligned}
P(\xi_0) - P(\xi) &= \int_{\xi}^{\xi_0} dP = \int_{\xi}^{\xi_0} \frac{\partial P}{\partial \xi} d\xi \\
&= \int_{\xi}^{\xi_0} [-R\{(\frac{u^2}{2})_x - \omega v\}x_{\xi} + \Delta u x_{\xi} \\
&\quad - R\{(\frac{u^2}{2})_y + \omega u\}y_{\xi} + \Delta v y_{\xi}] d\xi \\
&= -R[\frac{u^2}{2}]_{\xi}^{\xi_0} + \int_{\xi}^{\xi_0} [-R\omega\psi_{\xi} + \frac{\beta\omega_{\xi} - \gamma\omega_{\eta}}{J}] d\xi \quad (2-18)
\end{aligned}$$

同様に η 座標を固定, ξ に関して積分を行なう際は

$$P(\eta_0) - P(\eta) = -R[\frac{u^2}{2}]_{\eta}^{\eta_0} + \int_{\eta}^{\eta_0} [-R\omega\psi_{\eta} + \frac{\alpha\omega_{\xi} - \beta\omega_{\eta}}{J}] d\eta \quad (2-19)$$

実際の積分には、 O -タイプ座標, H -タイプ座標おののおのにおける物理面と計算面の対応の相違を考えて、(2-18), (2-19)式を使いわけた。

2.6 抵抗係数

バルブ表面の微小部分 ds に流体のおよぼす力を決定する式は、バルブ表面が η 一定の座標線で示されることと、ここではすべりなしの条件が満されていることから次のように簡単化される：

$$dx/d\xi = py_{\xi} - \omega x_{\xi} \quad , \quad (2-20)$$

$$dy/d\xi = -px_{\xi} - \omega y_{\xi} \quad . \quad (2-21)$$

抵抗係数 C_D は dX をバルブ表面上で積分することによって

求められる,

$$C_D = \frac{1}{R} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} (pY_{\xi} - \omega x_{\xi}) d\xi \quad (2-22)$$

ここで係数 $1/R$ は無次元化の定義に基づいて入れてある。

Y の積分によって決定される揚力係数は、流れの上下対称性より 0 となる。

3. 議論

3.1 結果

本研究においては Reynolds 数 0, 3, 7, 10, 20, 30, 40 の流れを調べた。これらの値は実用上小さく見えるであろうが、今井 (1958) の指摘によれば、流れ模様の時間的平均に問題を限れば、鈍頭物体まわりの高 Reynolds 数流れは、有効 Reynolds 数 40 の定常流れによってモデル化される。

x_0 の値が適正であるかを調べるため Reynolds 数 40 の流れを $x_0 = 20$ とし解いた場合と、 $x_0 = 15$ とした場合との比較を行った。バルブ近傍での流れ模様は両者よく一致し、また抵抗係数 C_D の違いは 1% 以下であった。そこで、他の計算でもすべて $x_0 = 20$ を用いた。

0-タイプ座標の利点は、バルブ表面におけるすべり無し

の条件が高い精度で満たされることである。たとえば、もっとも大きいすべり速度は Reynolds 数 40 の流れにおける 0.0156 であった。それは一定の座標線がバルブまわりに十分集中されていたためである。反面、流路壁面上の圧力分布を十分な精度で求める事が出来なかったが、それは壁面上の格子点数が十分になかったためである（今の場合 20 であった）。なお、 ω_t の最終的な相対誤差は図 3-4 に示した。H-タイプ座標では、よどみ流線上および流路壁面上の格子点数は 12/あり、両者の上での圧力分布は何れも高い精度で算出することができた。バルブ上でのもっとも大きいすべり速度は Reynolds 数 40 の流れで、0.1223 であるが、この値は O-タイプに於ける値のほぼ 8 倍である。 ω_t の相対誤差はバルブ近傍で 0.01 以下であり、流れの場全体においても 0.06 以下であった。このことから、計算終了時には非定常流れの極限としての定常状態が十分な精度で得られたことが解る。

Reynolds 数 40 の流れ模様の定常状態を図 3-1, 2, 3 に示す。Reynolds 数 0 では流れは x に関して対称であるが、 $R=40$ では明らかに非対称になる。図 3-3 ではバルブ先端に強い渦度を持つ領域が見られ、また後方に渦度の弱い領域が広がっているのがわかる。これはさらに高い Reynolds 数の流れにおける剥離の兆候を示すものと思われる。

図4-1, 2はおのおの $R=40$ の流れにおけるよどみ流線上, および流路壁面上の圧力分布を示す。一様流の中に置かれた球を過ぎるストークス流れの場合と同様に (Landau and Lifshitz, 1959), バルブ先端および後端付近には圧力勾配 ($\partial p/\partial x$) が正となる領域が存在する。このバルブ近傍を除けば, よどみ流線上と流路壁面上の圧力分布はよく一致している。なお流路壁面上にも圧力勾配が正の領域がある。

O-タイプ座標を用いた計算による抵抗係数とH-タイプ座標によるものの差は, Reynolds 数40の流れにおけるものが最大で, 2.54% であった。抵抗係数と Reynolds 数の関係を図5に示す。この図では, 図を読みやすくまとめるため縦軸は C_D とせず, RC_D とした。Reynolds 数20および40の結果を用いて今井 (1958) の公式における係数を求めると

$$C_D^{1/2} = 0.212 + 6.90R^{-1/2} \quad (3-1)$$

を得る。また, C_D と R^{-1} との間の線形の関係としては次の式も考えられる

$$C_D = 0.308 + 55.5/R \quad (3-2)$$

(3-1) 式に基づく RC_D 値は破線を用いて, (3-2) 式に基づくものは一点鎖線を用いて図5に示してある。本研究の結果は (3-2) 式の方によりよく一致する。これは今井の公式に対する流路壁の影響を考えねばならない事を示している。

3.2 まとめ

本研究においてはバルブの迎え角が無い場合のみを取り扱った。しかし、一般曲線座標の概念はバルブが迎え角を持つ場合の解析にも適用でき、数値解析にも本研究のものをほとんどそのまま使う事が出来る。バルブが迎え角を持つ場合には、よどみ流線の流れ関数の値が (Reynolds 数 0 の場合を除き) 最初からは解らないので、これを解析の過程で決定せねばならない。Thompson ら (1976), 内田 (1980) および Alam ら (1983) が示したように、バルブ表面での圧力の一価性の検証を解析に導入することが必要となる。

本研究を進めるに当り、この議論について、松田卓也助教授と、蜂巢泉博士に感謝します。

又、数値計算は京都大学計算センターにおいて、富士通 M-382 を用いて行なった。

参考文献

1. Alam, Md.S., Kawamura, T., Kuwahara, K. and Takami, H., 1983, "Numerical Computation of the Interaction between Bluff Bodies in a Viscous Flow", 数理解析研究所講究録476, 京都大学数理解析研究所, PP125-143

2. 今井 功, 1958, "流体抵抗の理論", 科学, 28 卷,
PP110-115
3. 木村雄吉, 桑田千照, 米田純一, 1980a, "バタフライ
バルブに関する研究 — 流量係数 c_v 値特性",
KR-F01, 神戸大学工学部
4. 木村雄吉, 桑田千照, 米田純一, 1980b, "バタフライ
バルブに関する研究 — 流量・トルク・キャビテー
ション特性", KR-F02, 神戸大学工学部
5. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., 1959, "Fluid Mechanics",
Pergamon Press, Oxford, PP63-66
6. Roache, P.J., 1972a, "Computational Fluid Dynamics",
Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, P155
7. Roache, P.J., 1972b, "Computational Fluid Dynamics",
Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, P141
8. Themes, F.C., Thompson, J.F., Mastin, C.W. and Walker, R.L.,
1977, "Numerical Solutions for Viscous and Potential
Flow about Arbitrary Two-dimensional Bodies Using
Body-Fitted Coordinate System",
Journal of Computational Physics, Vol.24, PP245-273
9. Thompson, J.F., Themes, F.C. and Mastin, C.W., 1976,
"Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate System for

Solution of Partial Differential Equations on Fields
Containing Any Number of Arbitrary Two-dimensional
Bodies", NASA CR-2729

10. Thompson, J.F., Themes, F.C. and Mastin, C.W., 1977,
"TOMCAT — A Code for Numerical Generation of Body-
Fitted Curvilinear Coordinate System on Fields
Containing Any Number of Arbitrary Two-dimensional
Bodies", Journal of Computational Physics, Vol.24,
PP274-302
11. 内田博幸, 1980, "二次元粘性流の有限要素解析(工業
的問題への2~3の応用)", 宇宙航行の力学シン
ポジウム講演予稿集, 東京大学宇宙航空研究所,
PP130-136
12. 山下透, 1980, "二次元流路内に迎角を持って置かれた
平板回りの低 Reynolds 数流れ" 修士論文,
京都大学工学部

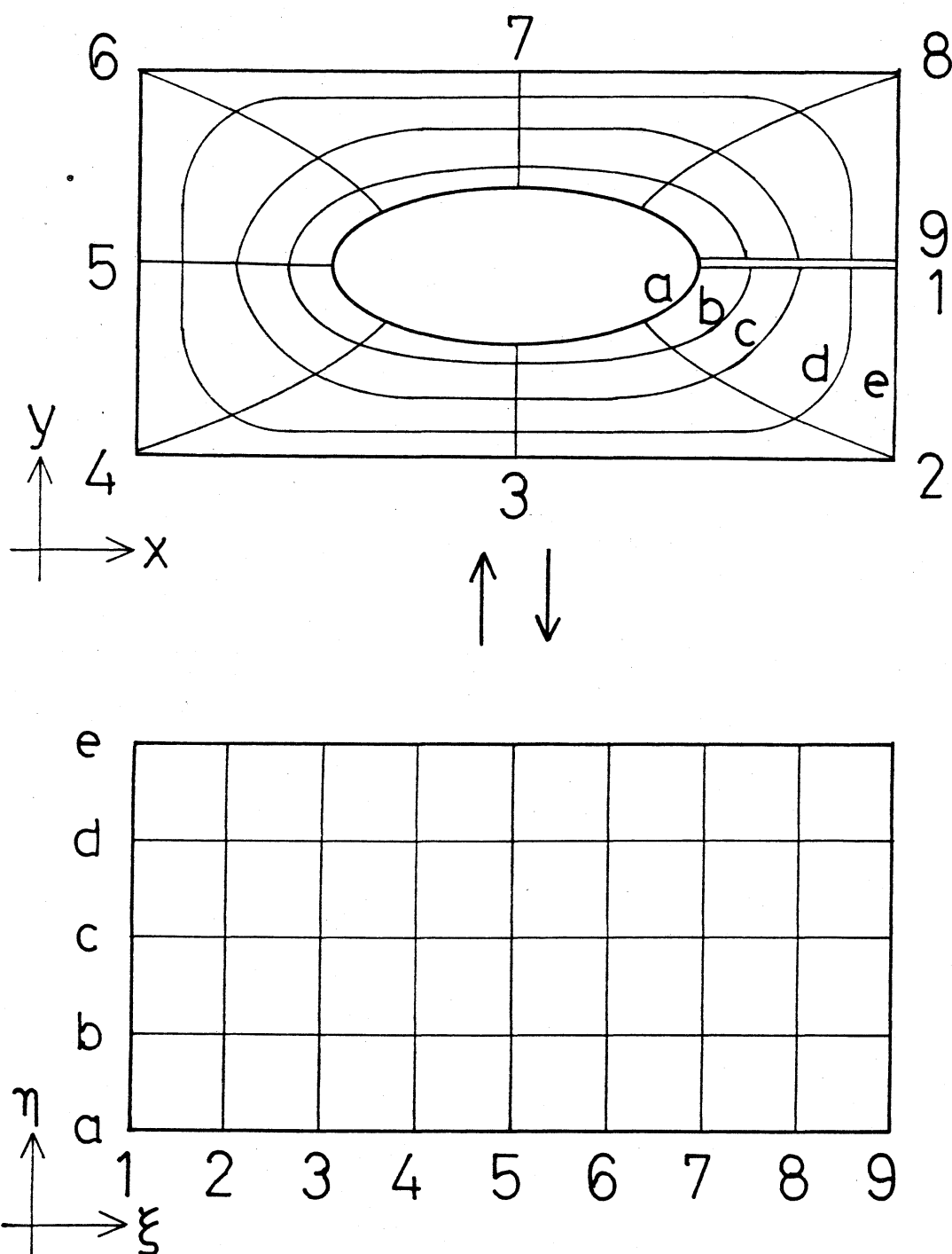


図1 $\bar{0}$ -タイプ座標系における物理面と計算面の対応。
同一の記号を持つ座標線がそれぞれ対応する。

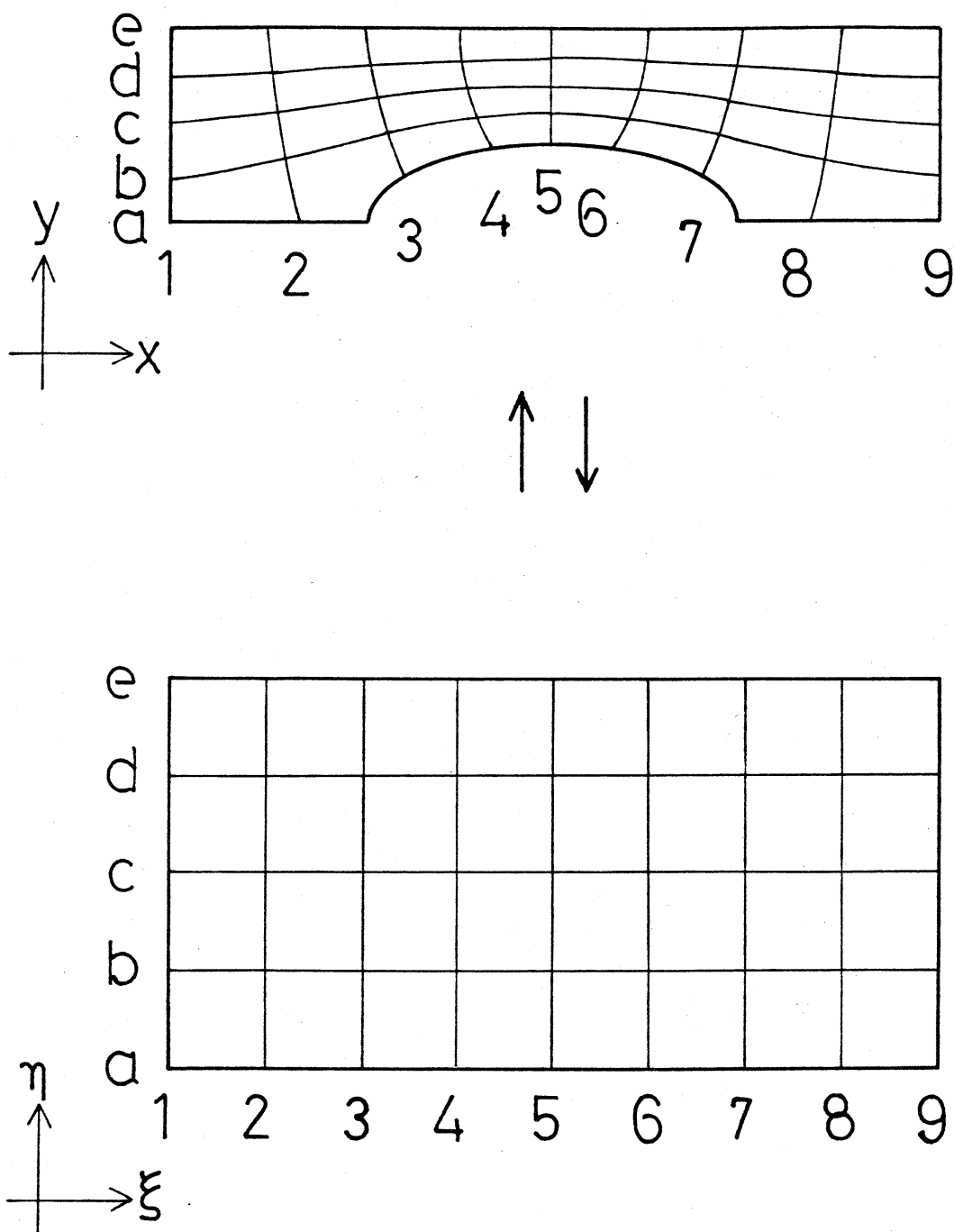


図2 H-タイプ座標系における物理面と計算面の対応。
同一の記号を持つ座標線がそれぞれ対応する。

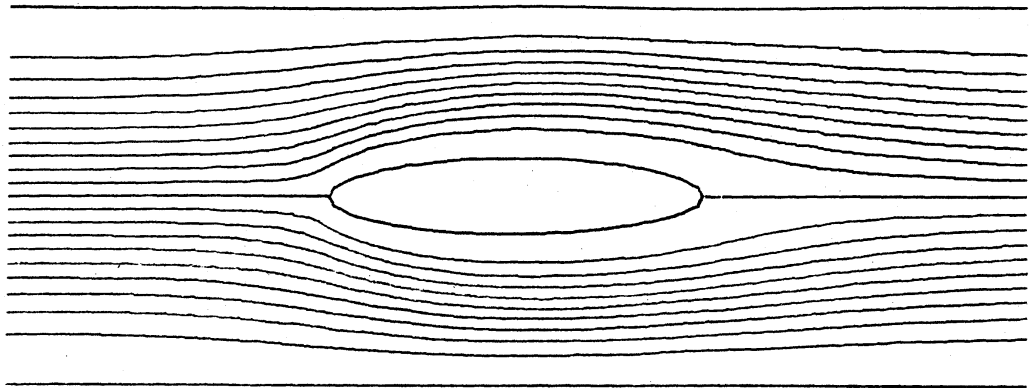


図 3-1 $R = 40$, $x_0 = 20$ の場合の流線。
 \bar{O} -タイプ座標を使用。

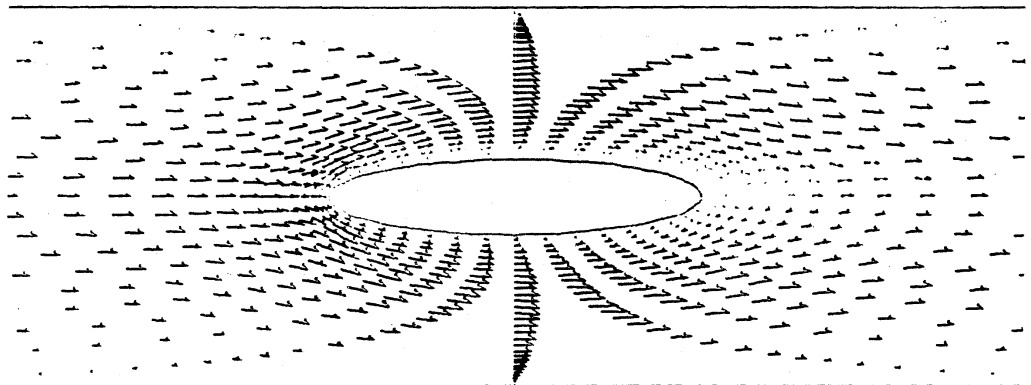


図 3-2 $R = 40$, $x_0 = 20$ の場合の速度ベクトル。
 \bar{O} -タイプ座標を使用。

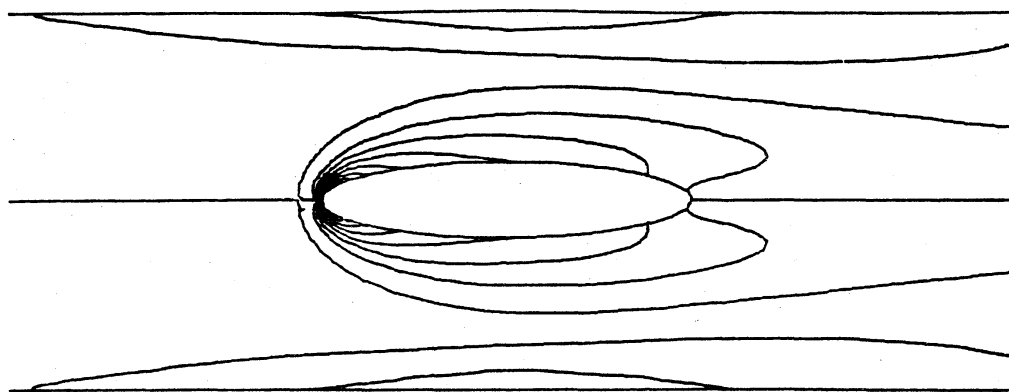


図3-3 $R=40$, $x_0=20$ の場合の等渦度線。

\bar{O} -タイプ座標を使用。

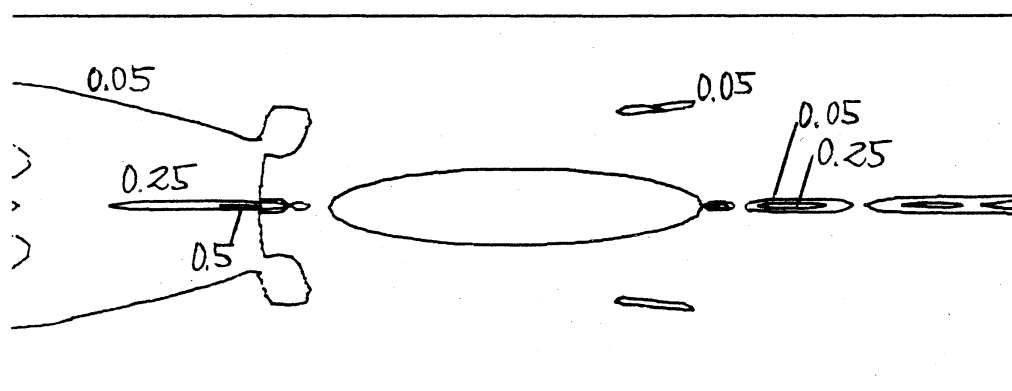


図3-4 $R=40$, $x_0=20$ の場合の定常性を表す
パラメータ γ の等高線。ただし、ここで

$$\begin{aligned} r = & |\omega_t| / \{ |\psi_\eta \omega_\xi / J| + |\psi_\xi \omega_\eta / J| \\ & + (|\alpha \omega_{\xi\xi}| + |2\beta \omega_{\xi\eta}| + |\gamma \omega_{\eta\eta}|) / J^2 R \\ & + (|Q \omega_\eta| + |P \omega_\xi|) / R \} \end{aligned}$$

各等高線に付した数値が γ の値を示す。
 \bar{O} -タイプ座標を使用。

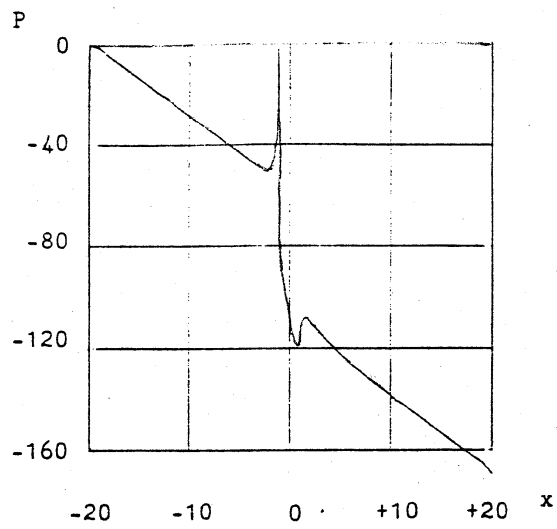


図4-1 $R=40$ の場合のよどみ流線上の圧力分布。
H-タイプ座標を使用。

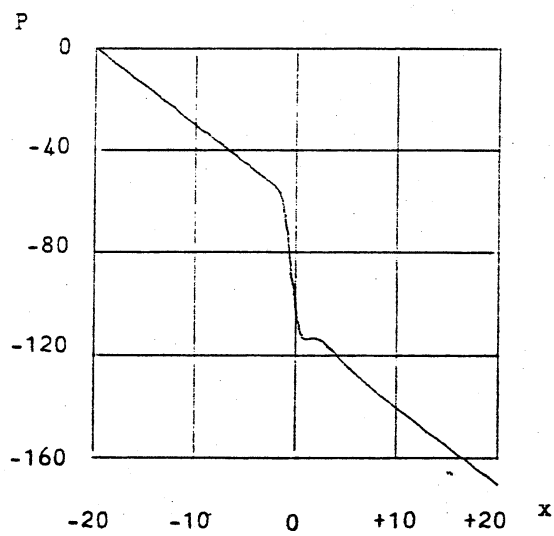


図4-2 $R=40$ の場合の流路壁面上の圧力分布。
H-タイプ座標を使用。

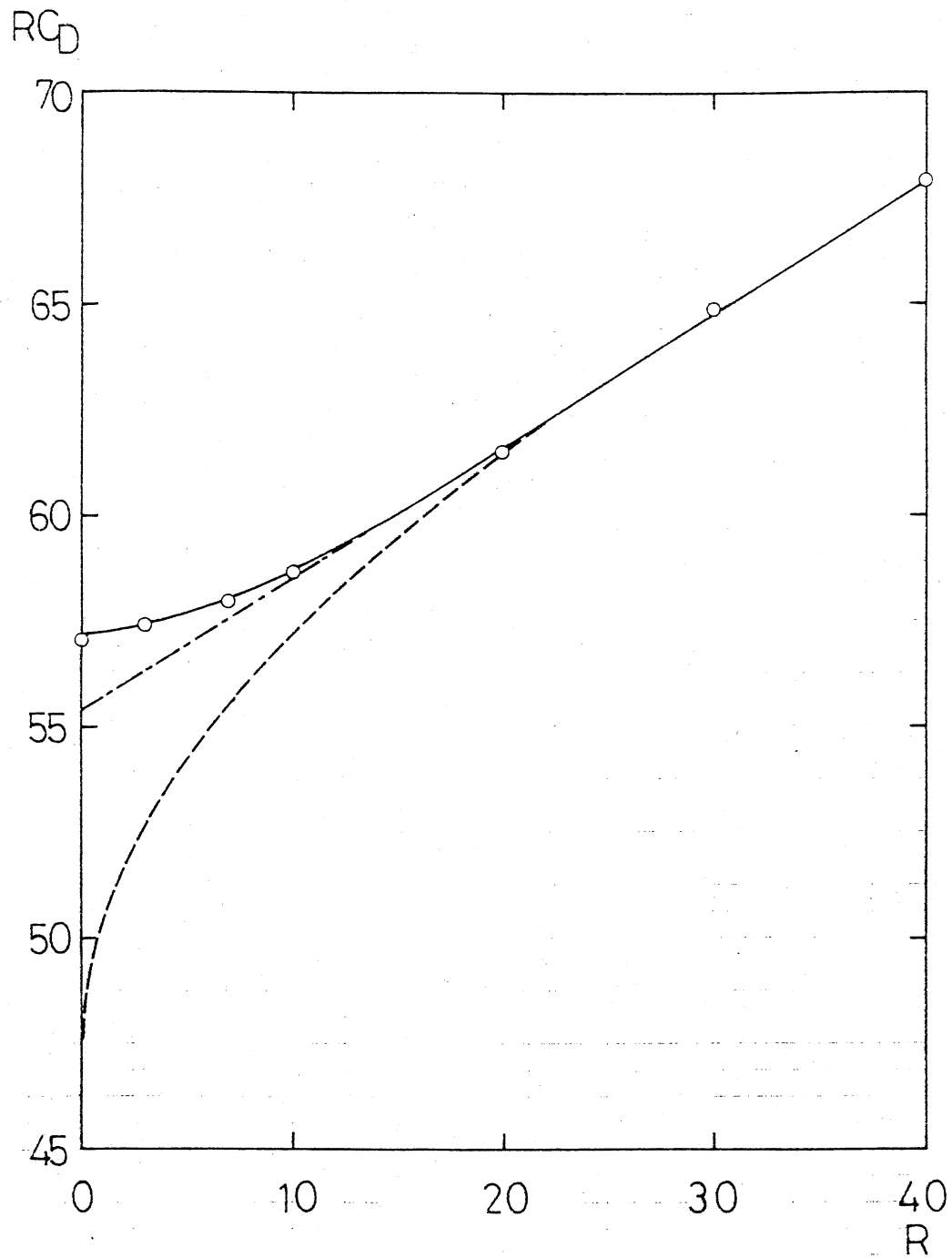


図5 RC_D 値の R 依存性。
 \bar{O} -タイプ座標を使用。